

длина

прин. Σ

вероят.

N -кр.; M -бел.; $k = n+m$; $K = N+M$; $\frac{C_N^n \cdot C_M^m}{C_K^k}$;
Аксиомы (на конеч. пространстве)

- 1) Непредсказуемость.
 - 2) Взаимозависимость
 - 3) Устойчивость частот $\frac{\#(A)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \in [0,1]$
- $\#(A)$ - число реализаций. $\omega \in A$;
Сложившаяся ситуация

Парадокс Бертрона



Вероятностное пр-во

Ω - мн-во элем. событий, $\Omega \neq \emptyset$

$\mathcal{A}$ - класс под-т мн-ва Ω , ~~$\mathcal{A} \neq \emptyset$~~

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$
 - 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
 - 3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- То есть $\mathcal{A}$ класс алгебры.

3') $A_1, A_2, \dots \Rightarrow A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow$ Если выполн 3), 3'), то это сумма-алгебра σ -алгебры

Невозможное событие: $\emptyset$, достоверное (поэтому это то событие)

~~Вероятностное пр-во~~ $(\Omega, \mathcal{A})$, при $\mathcal{A}: \{\emptyset, \Omega\}$

пр-во $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ и т.

1) $P(A) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$

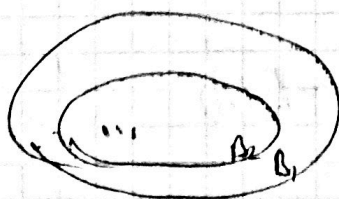
3) $A_1, A_2, \dots; A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - вероятностное пр-во (вероятностная модель)

3') $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

3'') $B_1, B_2, \dots; B_i \in \mathcal{A}, B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B), B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

3) $\Rightarrow \begin{cases} 3') \\ 3'') \end{cases}$



$C_k = B_k \setminus B_{k+1}$ они не пересекаются

$$P(B_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) + P(B)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P(B_n) = \sum_{k=1}^n P(C_k) + P(B)$$

$\frac{dP}{dP(B)}$
попробовать
разложить

$$3) \subseteq \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + 0 = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

$\mathcal{K}$ - класс логич. мн-ва $\mathcal{K}$; $(\mathcal{K}, \mathcal{A})$ - σ -алгебра

$\sigma(\mathcal{K})$:

- 1) $\mathcal{K} \subseteq \sigma(\mathcal{K})$
- 2) $\forall \mathcal{A}: \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}$

Вероятность на алгебре или $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ - снова событие

$(\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероят. м-во в широком смысле.

Т. Каратеодори (о продолжении меры)

Пусть $(\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ вероят. м-во в широком смысле, тогда на $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{A}))$ $\exists!$ $\mathbb{P}'$: $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A)$

$$1) \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$2) \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$$

$$3) A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$$4) \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$5) \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$6) \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$7) \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$$8) \text{ Нер-во Бонферрони: } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\bar{A}_i)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$$

Лемма

$A, B \in \mathcal{A}$; $(\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A$ и B независимы

Пусть $\mathbb{P}(B) > 0$; $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

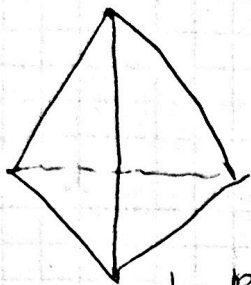
Тогда, $(\mathcal{B}, \mathcal{A}_B, \mathbb{P}_B)$

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}, \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

не все независимы, $\neq$ зависимы.

$IP(A|B) = IP(A)$ - Теорема

$A_1, \dots, A_n$ независимые события в совокупности
 $IP(\bigcap_{j=1}^n A_j) = \prod_{j=1}^n IP(A_j)$
 $\forall m=2, \dots, n; \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n.$



Бернулли
Бернулли

$K \in \{K, C\}; "K", "C", "3";$
 $IP("K" \cap "3") = \frac{1}{4} = IP("K") \cdot IP("3") = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$
 $\frac{1}{4} = IP("K" \cap "3" \cap "C") \neq IP("K") IP("C") IP("3") = \frac{1}{8}.$

$n \geq 1, B_1, \dots, B_n; B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j); \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega; IP(B_i) > 0 \forall i$
 Тогда образующая полную группу (с теорией групп)
теорема

$IP(A) = IP(A \cap \Omega) = IP(A \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i)) = IP(\bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)) \stackrel{\text{Борн-Фелли}}{=} \sum_{i=1}^n IP(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n IP(A|B_i) IP(B_i)$

~~A - произв. событие~~

Пусть $IP(A) > 0, IP(B_i) > 0 \forall i;$

$IP(B_i|A) = \frac{IP(A \cap B_i)}{IP(A)} = \frac{IP(A|B_i) IP(B_i)}{\sum_{j=1}^n IP(A|B_j) IP(B_j)}$ Формула Байеса
 аналогично

Формула полной вероятности

Пример - $V = \begin{cases} 1 \\ \pi \end{cases}$

$IP(Z=1 | Y=1) = 0.99$

показ-гс. - $Z = \begin{cases} 1 \\ \pi \end{cases}$

$IP(Z=1 | Y=\pi) = 0.01$

$IP(Y=1) = 0.5$

$IP(Y=1 | Z=1) = \frac{IP(Z=1 | Y=1) IP(Y=1)}{IP(Z=1 | Y=1) IP(Y=1) + IP(Z=1 | Y=\pi) IP(Y=\pi)} = \frac{1}{2}.$

$\xi(\omega) \in \mathbb{R}; \mathcal{B}$ - сигма-алгебра, порождённая всеми интервалами на $\mathbb{R}$ - Борелевской
 Оказывается на практике
 с.б.м. не есть борелевской.

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$ ξ - с.в.м.; P определена на $\mathcal{A}.$

$\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$

$\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - борелевская, если $\forall B \in \mathcal{B}. f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$

$\xi(\omega)$ - с.в., f - бор. ф-ция $\Rightarrow f(\xi(\omega))$ - с.в.

f -c.b. $\Rightarrow f^+(w) = \max\{0, f(w)\}$, $f^-(w) = -\min\{0, f(w)\}$.

$f^+(w) = \max\{0, f(w)\}$, $f^-(w) = -\min\{0, f(w)\}$.
 или-то pay. или -бери-бери.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$;

$\mathcal{B}$; $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^+(B) = \{w: f(w) \in B\} \in \mathcal{A}$ - имп. с.б.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall B \in \mathcal{B}: f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ - срещ. функ.

f -c.b., f -срещ. $\Rightarrow f(f)$ -c.b.

$$\{w: f(f(w)) \in B\} = \{w: f(w) \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}\} \in \mathcal{A}$$

Лемма $\mathcal{E}$ - порождено мин-базой приемной и

$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$, тогда f -c.b. $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} f^+(E) \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ очевидно, $\Leftarrow$: $\mathcal{D} = \{D: D \in \mathcal{B}; f^+(D) \in \mathcal{A}\}$,

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, $f^+(\bigcup A_i) = \bigcup f^+(A_i)$, $f^+(\bar{A}) = \overline{f^+(A)}$ $\Rightarrow \mathcal{D}$ само по себе
 минимальная алгебра

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{D} = \mathcal{B} \blacktriangleright$$

Л-с $f(w)$ -c.b. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \{w: f(w) < x\} \in \mathcal{A}$

$\leq$
 $\geq$ } эквивалентно, порождается огу и ту же $\mathcal{B}$

Л-с.1 $f(w)$ -c.b. $\Rightarrow f^+ = \max\{0, f\}$ -c.b.

$f^- = -\min\{0, f\}$ -c.b.

Л-с.2 $f_1, f_2, \dots$ - c.b. $\Rightarrow \sup f_n$ -c.b.; $\inf f_n$ -c.b.

$$\{w: \sup_n f_n(w) \leq x\} = \bigcap_n \{w: f_n(w) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

$$\{w: \inf_n f_n(w) > x\} = \bigcap_n \{w: f_n(w) > x\} \in \mathcal{A}$$

Л-с.3 $f_1, f_2, \dots$ - c.b. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ -c.b., $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ -c.b.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_m \sup_{k \geq m} f_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_m \inf_{k \geq m} f_k$$

Л-с.4 $f_1, f_2, \dots$ - c.b. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ -c.b.

$$\begin{aligned} \{w: f(w) < x\} &= \{w: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) < x\} = \bigcap_{n \rightarrow \infty} \{w: f_n(w) < x\} \\ &= \bigcap_{n \rightarrow \infty} \{w: \lim_{k \rightarrow \infty} f_k < x\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Лемма $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $n \geq 1$

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$
 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$

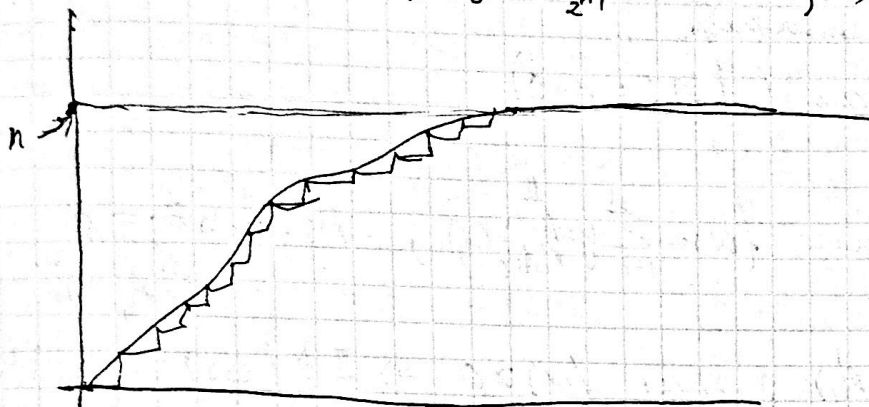
$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad x_1, x_2, \dots, x_n: x_i \in \mathbb{R}$$

$$f_n(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) - \text{простая сл. в.в. (принимает кон. число зн.)}$$

Уб. 1. $f(\omega)$ - с.в. $\Rightarrow \exists \{f_n(\omega)\}_{n \geq 1}: \forall n, f_n$ - простая с.в., $|f_n| \leq |f|; f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$.

2. $f \geq 0 \Rightarrow \exists \{f_n(\omega)\}_{n \geq 1}: \forall n, f_n$ - простая с.в. $f_n \uparrow f$ монотонно возрастают.

$$\textcircled{2}: f_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{\{\omega: \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}\}}(\omega) + n \cdot \mathbb{1}_{\{\omega: f(\omega) \geq n\}}(\omega)$$



$$\textcircled{1}: f^+(\omega) = \max\{0, f(\omega)\} \geq 0 \quad f^-(\omega) = \min\{0, f(\omega)\} \leq 0$$

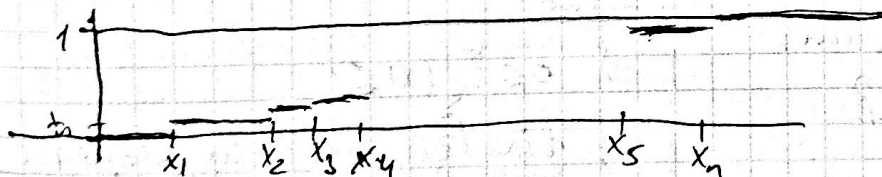
Замеч. простая с.в.: $f(\omega) \pm \eta(\omega)$, $f_n(\omega) \pm \eta_n(\omega)$
 функции (*) измеримы; $f_n(\omega) \pm \eta_n(\omega)$ - прост. с.в.

$$f(\omega) \cdot \eta(\omega) \leftarrow f_n(\omega) \cdot \eta_n(\omega); \quad \frac{f(\omega)}{\eta(\omega)} \leftarrow \frac{f_n(\omega)}{\frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{\{\omega: \eta_n(\omega) > 0\}}(\omega) + \eta_n(\omega)}$$

$$f(\omega), \quad \{\mathbb{R}; \mathcal{B}, P_f\}, \quad \forall B \quad P_f(B) = P(\{\omega: f(\omega) \in B\})$$

$$F(x) = P(\{\omega: f(\omega) \leq x\}) = P_f((-\infty, x]), \quad F(x) \leq F(y), \quad x < y$$

$x_1, \dots, x_n$; значения известны



New Lecture

$$(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad f$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_f),$$

Понятие о мере и интегрирование по мере

$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $[0, 1]$, $\mathcal{B}_{[0,1]}$

Цель: задать счетно-адит. гр. $\mu_{[0,1]}(a, b) = b - a$
 $0 \leq a < b \leq 1$

$$0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < 1, \quad \mu_{[0,1]}(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^n \mu_{[0,1]}([a_i, b_i])$$

Согласно Т. Карнеготи

$\exists$ гр., адит. неогр. $\mu_{[0,1]}, \mu_{[0,2]}, \dots, \mu_{[0,n]}, \dots$
 не адит. адит.

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_{[n, n+1]}(A \cap [n, n+1])$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$

Пусть есть $f(x)$, если $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$, $A_i: A_i \cap A_j = \emptyset$
 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbb{R}$

каж-я простая гр.

$$\int f(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i), \quad \text{если } f(x) \geq 0 \Rightarrow \exists \{f_n(x)\}: f_n(x) \uparrow f(x)$$

или-л Лебеля

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}}(x) +$$

$$+ n \mathbb{1}_{\{f(x) \geq n\}}(x), \quad n \rightarrow \infty$$

Измерим Лебеля от $f(x) \geq 0$ требуется

$$\int f(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \mu(dx)$$

- 1) f — м-л
- 2) гр-л м-л себе не вст.

$$f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$$

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\},$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

$$\int f(x) \mu(dx) = \int f^+(x) \mu(dx) - \int f^-(x) \mu(dx)$$

Рассматр. только гр-л м-л:

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \{x: f(x) < y\} \in \mathcal{B}$$

Об-ва:

$$1) \text{ Если } G \in \mathcal{R}_{a,b} \Rightarrow G \in \mathcal{G}_{a,b}$$

$$2) \int f(x) \mu(dx) = \int f(x) \mathbb{1}_A(x) \mu(dx)$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \Rightarrow \int |f(x)| \mu(dx) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \int |f(x)| \mu(dx) < \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f(x) \mu(dx) = 0$$

$$\int f(x) \mu(dx) = 0;$$

сд. 13

По аналогии: $\{w: g(w) < x\} \in \mathcal{A}$
 (аналогия с гр. с. 6.);

$$F_g(x) = P(\{w: g(w) < x\})$$

Об-ва:

$$1) 0 \leq F_g(x) \leq 1$$

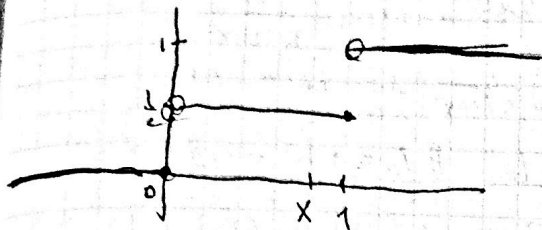
$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_g(x) = 0 \quad (\text{из непрерыв. лог. вл. как функция})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_g(x) = 1$$

$$3) x < y \Rightarrow F_g(x) \leq F_g(y) \quad (\text{беспр. ад. и непрерыв.})$$

$$4) F_g(x) \text{ непрерыв. слева}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$



или-то скачков счётно $\frac{1}{n} \rightarrow$;

$$(\mathcal{C}[0,1], \mathcal{B}_{\mathcal{C}[0,1]}, \mu_{\mathcal{C}[0,1]}) , g(w) = w$$

$$F_g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Опр м. в. g, принимаю. счётное
число значений на-е гипер.

$$F_g(x) \text{ гипер. с. в. на-е гипер.}$$

$$\forall x \quad F_g(x) = \int_{-\infty}^x p_g(y) \mu(dy), \text{ если}$$

существует $p_g(y) \stackrel{\text{с. в.}}{\Rightarrow} F_g(x)$ на-е
абс. непрерыв. и $p_g(y)$ - плотн. гр. в. в. в.

$$p_g(y) = \begin{cases} 1, & y \text{ ирр. } y \in [0,1] \\ 0, & y \text{ рац.} \end{cases}$$

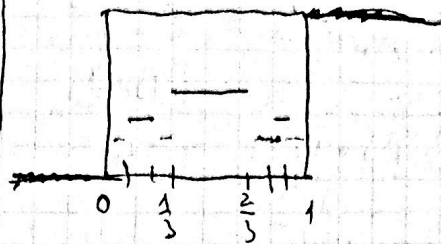
$$\int_0^x p_g(y) \mu(dy) = x \quad p_g(y) = 0, y \text{ рац.}$$

(по опр-ию)

$p_g(y)$ - опис. с т. гр. мн-в
мн-в Лебеса

Упр Любая абс. непрерыв. гр.
непрер.

Опр x-г. р.с. f, если
 $\forall \varepsilon > 0 \quad f(x+\varepsilon) - f(x) > 0$
гр. непрерыв. и имеет левую
пределу 0:



В предель непрерыв.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

опрет где непрер.
непрер.

$\Rightarrow$ гипер. где не непрерыв. = 0

Опр ф. непрерыв. и мн-в о по
Лебесу мн-в. в. в. р.с. на-е сигнатур.

Теор. Лебеса $\forall F_g(x)$ может быть гипер.

$$\text{в виде } F_g(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$$

гипер. абс. непрерыв. сигнатур.
 $a_i \geq 0, a_1 + a_2 + a_3 = 1.$

$$P(a \leq g < b) = F_g(b) - F_g(a)$$

Индикатор Лебеса:

Опр ξ, η на-е незав., если

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$$

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ на-е незав.
 $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
 $\forall B_{j1}, \dots, B_{jn} \in \mathcal{B}$
 $P(\xi_i \in B_{i1}, \dots, \xi_i \in B_{in}) = P(\xi_i \in B_{i1}) \cdot \dots \cdot P(\xi_i \in B_{in})$

$$1) 0 \leq F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) \leq 1$$

$$2) y > 0 \Rightarrow F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, y) - F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

и непрерыв. слева по каждой гр. x_i .

$$3) \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{\xi}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Опр. ~~Безусловно независимые~~ случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются независимыми, если $\forall B \in \mathcal{B}_n$

$$P(\vec{X} \in B) = \int_{\mathcal{B}} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

П. раз. случайных величин независимых.

$$\vec{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{i, i-1}, X_{i, i+1}, \dots, X_{in})$$

$$P_{\vec{X}_i}(x_{i1}, \dots, x_{i, i-1}, x_{i, i+1}, \dots, x_{in}) = \int_{\mathcal{B}} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$\forall B \in \mathcal{B}_{n-1}, \vec{X}_i \in B = \{X_i \in B\} \cap \{X_i \in \Omega_i\}$$

$$\{X_i \in B\} = \{X_i \in B\} \cap \{X_i \in \Omega_i\}$$

$$P(\vec{X}_i \in B) = \int_{\mathcal{B} \cap \Omega_i} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \ominus$$

и где Ω_i

$$\ominus \int_{\mathcal{B}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{B}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Кр. теор. сл. велич.

сл. велич. $X_1, \dots, X_n$ независимы, если

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

Следствие сл. велич. $X_1, \dots, X_n$ независимы, если

$$= \prod_{i=1}^n P_{X_i}(x_i)$$

Упрощ. запись

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ случайная величина X - случайная величина

сл. велич. $X_1, X_2, \dots$

$$E X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)$$

Пример $IP(X=k) = \frac{c}{k^2}, k=1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^2} = c \frac{\pi^2}{6} = 1 \Rightarrow c = \frac{6}{\pi^2}$$

$$E X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{6}{\pi^2 k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$P(X \leq k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}, E X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \infty - \infty$$

$$P_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n); E \vec{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\vec{X}}(x) dx$$

$$P_{\vec{X}}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$E(aX+b) = aEX+b$$

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) \text{ no onp.}$$

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x);$$

$$X_n(w) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} 1_{\{w: \frac{k-1}{2^n} \leq X(w) \leq \frac{k}{2^n}\}}$$

$$(w) + n 1_{\{w: X(w) \geq n\}}(w) \geq X(w)$$

$$\int X_n(w) P(dw) = \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(\frac{k-1}{2^n} \leq X(w) \leq \frac{k}{2^n})$$

$$+ n P(X(w) \geq n) = \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(\frac{k-1}{2^n} \leq X(w) \leq \frac{k}{2^n}) + n P(X(w) \geq n)$$

используем Т. Вероятностей

сл. велич. $X_1, \dots, X_n$

$$\int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(\frac{k-1}{2^n} \leq X(w) \leq \frac{k}{2^n}) = \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n})$$

$$= \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n})$$

$$\int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n}) = \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n})$$

$$\int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n}) = \int \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^n} P(X(w) = \frac{k-1}{2^n})$$

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{\Omega} X(w) P(dw) = \int_{\Omega} X(w) P(dw)$$

$$= \int_{\Omega} X(w) P(dw)$$

$$E(a-X)^2 = E a^2 - E X^2$$

$$E(a-X)^2 = E a^2 - E X^2$$

Пример

$(\Omega, \mathcal{A}, P), X(w): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$E X = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(w) P(dw) = \int_{\Omega} X(w) P(dw)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x), F_X(w) = P(X \leq x) \ominus$$

$$\ominus IP(X(w) \leq x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(\omega) P(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} P\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}\right) \right] \quad (1)$$

$$\textcircled{1} n P\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}\right) \geq$$

$$(R, B, P_f), P_f(B) = P(\omega: f(\omega) \in B)$$

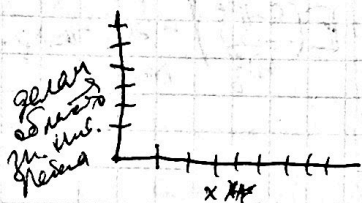
$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} P_f\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \right] + n P_f([1, \infty)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x P_f(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_f(x)$$

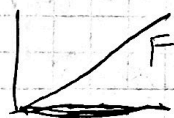
$$P_f([a, b]) = F_f(b) - F_f(a) = F_f(a, b) - F_f(a) \quad \textcircled{3}$$

$$b = a + \delta$$

$$\textcircled{4} \Delta F_f(a)$$



$$[a, b] = F(b) - F(a)$$



Пусть $f \geq 0$, тогда

$$1) E f = 0 \Rightarrow P(f=0) = 1$$

$$2) E(f+g) = E f + E g \quad \text{Пусть}$$

Эти две гл. E , тогда существуют и средние.

$$f = \begin{matrix} x_1, x_2, \dots \\ p_1, p_2, \dots \end{matrix} \quad g = \begin{matrix} y_1, y_2, \dots \\ q_1, q_2, \dots \end{matrix}$$

$$E(f+g) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(f=x_i, g=y_j) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i P(f=x_i, g=y_j) + \sum_{i,j} y_j P(f=x_i, g=y_j)$$

$$\text{Если сл. события, то } \sum_j x_i P(f=x_i, g=y_j) =$$

$$= x_i P(f=x_i)$$

$$3) f, g - \text{независимы, } |E f| < \infty, |E g| < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E f g| < \infty, E f g = E f E g.$$

$$E f g = \sum_{i,j} x_i y_j P(f=x_i, g=y_j) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P(f=x_i) P(g=y_j) = \sum_i x_i P(f=x_i) \cdot$$

$$\sum_j y_j P(g=y_j) = E f \cdot E g$$

Теор. Рубини; доказ. в конце семестра.

$$q \in (0, 1);$$

$$\begin{cases} P(f \geq l_f(q)) \geq 1-q \\ P(f \leq l_f(q)) \geq q \end{cases}$$

q - вероятность

не зайти $F_f(x) = q$ т.к. f непрерывна.

Всп. функции вероятности $\frac{1}{2}$ на $[-1, 1]$

между собой и f и g ;

Если $F_f(x)$ - непрерывна $\Rightarrow F_f(\text{med } f) = \frac{1}{2}$

$$E|a-f| \rightarrow \min_a, \text{ то } \text{med } f = \arg \min_a E|a-f|$$

Квартили: $\frac{1}{4}$;

децили: $\frac{1}{10}$;

$$l_f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{med } f; \quad \text{med } f - \text{наиболее вероятное значение}$$

$$P(f > x) = e^{-\lambda x} \quad F_f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E f = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$E f = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1, \quad \text{med } f = \ln 2 \approx 0.69$$

$$\text{mod } f = 0$$

$$(E(f - E f)^2) = D f, \quad 1) D(a f + b) = a^2 D f.$$

$$E(f^2 - 2 f E f + (E f)^2) =$$

$$= E f^2 - (E f)^2$$

$$2) D f = 0 \Rightarrow P(f = \text{const}) = 1$$

$$3) D(f+g) = E(f+g)^2 - (E(f+g))^2 =$$

$$= D f + D g + 2 E f g - E f E g$$

Т.е. зависимость (связь) между случайными величинами.
 формула: $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

Def $\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] =$
 $= E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$;

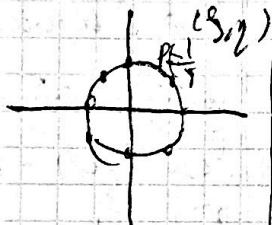
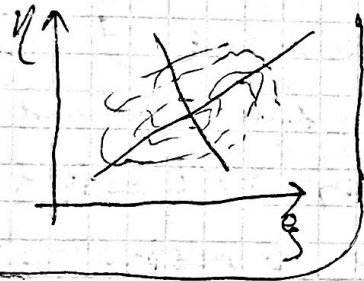
$D\xi$ - дисперсия (вариация) случайной величины.

$\rho = \rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}$, $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$
 коэффициент корреляции

$(f, g) = \int f(x)g(x)dx$, $f(w) = g(w) - E\xi$
 $g(w) = \eta(w) - E\eta$

$|\text{cov}(\xi, \eta)|^2 \leq D\xi \cdot D\eta$

$|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b: P(\eta = a\xi + b) = 1$



$E\xi\eta = 0$,

$E\xi = 0, E\eta = 0$, т.е. $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$.
 Но величина $\xi\eta$ не является константой.

Т.е. для корр-ции лине. зависимость.

$D\xi - E\xi^2 < \infty$

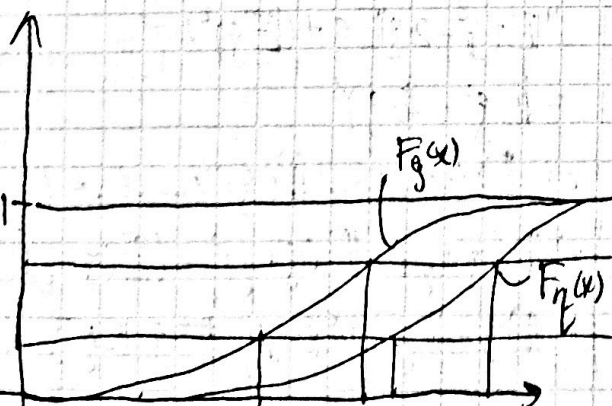
$E|\xi - \text{med}\xi| = |\xi| < \infty$

Def Информационный размах -

$R_g = \log\left(\frac{1}{q}\right) - \log\left(\frac{1}{q}\right)$ - аналог информации

$R_g \leq C \sqrt{D\xi}$,

$C \leq 1,9$



$\xi < \eta$,

$E\xi^k$ - моменты с. в. переменной

$E(\xi - E\xi)^k$ - центр. мом. с. в. переменной

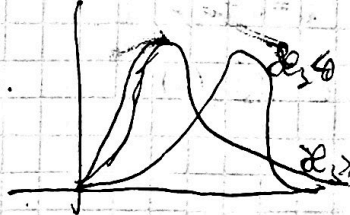
$E\xi^k$ - абс. момент с. в. переменной

$E|\xi - E\xi|^k$ - моменты

$E \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} \geq 0$, $E \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} = 1$

$E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)^3$ - коэффициент асимметрии с. в. переменной

$E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right)^4 = \alpha_4$ - коэффициент эксцесса.

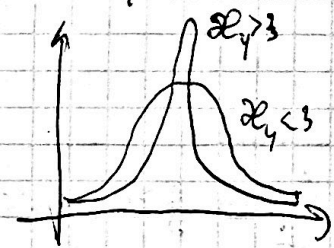


Def Корр-ция равна 1 с м. в. переменной

$\xi \sim \chi^2(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \alpha_4 = 3$.

$\alpha_4 > 3$

$\alpha_4 < 3$



Распределение функции от случайных величин

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$y_i = f_i(x)$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$J_f(x) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $J_f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists f^{-1}$

$J_f(x) \cdot J_{f^{-1}} = 1$

$\int_B \varphi(x) dx = \int_{f^{-1}(B)} \varphi(f(x)) |J_f(x)| dx$

Def. $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim P_{\vec{\xi}}(\vec{x})$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{\eta} = f(\vec{\xi}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{\vec{\eta}}(\vec{x}) = P_{\vec{\xi}}(f^{-1}(\vec{x})) = |J_{f^{-1}}(\vec{x})|$

$\forall B \in \mathcal{B}_n, \int_B P_{\vec{\eta}}(f^{-1}(\vec{x})) |J_{f^{-1}}(\vec{x})| d\vec{x} =$

$$= \int_{f^{-1}(B)} p_f(x) |J_{f^{-1}}(x)| |J_f(x)| dx =$$

$$= \int_{f^{-1}(B)} p_f(x) dx = P(\xi \in f^{-1}(B))$$

$$\textcircled{2} P(f(\xi) \in B) = P(\xi \in f^{-1}(B)) \Rightarrow \text{в.с.}$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \vec{\xi}, \quad p_{\vec{\xi}}(x_1, x_2) = p_{(\xi_1, \xi_2)}(x_1, x_2)$$

$$f: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$$

$$f^{-1}: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_2)$$

$$J_f(x) = J_{f^{-1}}(x) = 1, \quad \vec{\eta} = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2)$$

$$p_{\vec{\eta}}(x_1, x_2) = p_{\xi_1, \xi_2}(x_1 - x_2, x_2)$$

$$p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1, \xi_2}(x - y, y) dy$$

$$\text{Есть еще way, что } p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x - y) \cdot$$

$$p_{\xi_2}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x - y) dF_{\xi_2}(y)$$

$$p_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_2}(x - y) p_{\xi_1}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_2}(x - y) dF_{\xi_1}(y)$$

формулы свертки для плотности

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_1}(x - y) dF_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x - y) dF_{\xi_1}(y)$$

- формулы свертки

встречаются в г. Кудрявцев.

Будем считать

случае с квант. бернулли

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad P(\omega_1) = p, \text{ где}$$

$$P(\omega_2) = 1 - p.$$

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}, \quad \xi_1, \xi_2, \dots$$

и т.д.

и т.д.

решено к генерал

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto p^{\sum \omega_i} (1-p)^{n - \sum \omega_i}$$

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{— формула Бернулли}$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = n E\xi_1$$

$$E\xi_1 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = n D\xi_1 = n (E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2)$$

$$D\xi_1 = p(1-p)$$

$$\text{При } n \rightarrow \infty \quad P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \textcircled{2}$$

$$p, p_n \rightarrow 0$$

$$np_n \rightarrow \lambda > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^n (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^k (n-k)!}}_{\rightarrow 1} \underbrace{(1 - \frac{\lambda}{n})^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ формула Пуассона}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^0 = 1.$$

⇒ Плотность $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0, \dots, \infty$ — формула Пуассона.
Закон малых чисел (теорема Бернулли).

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda.$$

ξ — число успехов из n испытаний с вероятностью p

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k) = p > 1 \quad \text{— закон геометрич. разл.}$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (1-p)^k =$$

$$= p \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) = \frac{1}{p}.$$

$$\Rightarrow p \rightarrow 0 \Rightarrow E\xi \rightarrow \infty$$

$$E \frac{E}{E} = 1 \quad P(p \leq x) = P(x \leq p) \quad p \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sum_{k=\lfloor \frac{x}{p} \rfloor + 1}^{\infty} p(1-p)^k &= p \sum_{k=\lfloor \frac{x}{p} \rfloor + 1}^{\infty} (1-p)^k = \\ &= p \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor + 1}}{1 - (1-p)} = (1-p)^{\lfloor \frac{x}{p} \rfloor + 1} = (1-p)^{\frac{x}{p}} \\ (1-p)^{\frac{x}{p}} &= \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{y} - \frac{x}{y}} \rightarrow e^{-x} \end{aligned}$$

$\frac{1}{p} \equiv y, p = \frac{x}{y}$
 $y \rightarrow \infty$

$$P(T > x) = e^{-x}, \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$P(T < x) = 1 - e^{-x}, (1 - e^{-x})' = e^{-x}$$

e^{-x} — плотность рас-че
($\rightarrow$ экспоненц. рас-че)

$$P(T < x) = 1 - e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0$$

$$ET = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

New Lecture

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \quad \begin{aligned} ES_n &= np \\ DS_n &= np(1-p) \end{aligned}$$

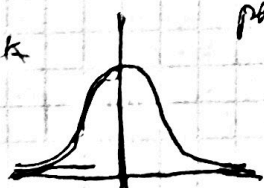
$$\textcircled{2} F_n(x), P(S_n < y) = F_n\left(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

T. Myabrya-Jaruvaa

$$\forall x \quad P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

норм. рас-че



$$\begin{aligned} n &= 300 \\ S_n &= 90 \end{aligned}$$

$$H_0: p = \frac{1}{2}; P_0(S_n \leq 90) \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^{90} \binom{300}{k} \cdot \frac{1}{2^{300}} = P_0\left(\frac{S_n - 150}{\sqrt{75}} \leq \frac{90 - 150}{\sqrt{75}}\right)$$

$$\textcircled{2} \Phi\left(1 - \frac{60}{\sqrt{75}}\right) \approx \Phi(-6.93) = \int_{6.93}^{\infty} \varphi(x) dx \textcircled{2}$$

$$y > 0: \int_y^{\infty} \varphi(x) dx \leq \frac{\varphi(y)}{y}$$

$$\int_y^{\infty} \varphi(x) dx = \int_y^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \leq \frac{1}{y} \int_y^{\infty} x \varphi(x) dx = \frac{\varphi(y)}{y}$$

$$\varphi(y) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\right) \leq 1 - \Phi(y) = \frac{\varphi(y)}{y}$$

$$\textcircled{2} \frac{\varphi(6.93)}{6.93} \approx \frac{\varphi(7)}{7} = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{49}{2}} \approx 10^{-10}$$

2.1.1 — упр. ниса

$\approx$ утундас е том. $\frac{C(p)}{n!}$

Нерав-ба

$$\forall \varepsilon > 0, P(\xi \leq x) \leq \frac{E\xi}{x} \quad \text{— Марков}$$

$$\exists E\xi$$

$$E\xi = E\xi \mathbb{1}(\xi \geq x) + E\xi \mathbb{1}(\xi < x) \geq E\xi \mathbb{1}(\xi \geq x) \geq 0$$

$$\geq x E \mathbb{1}(\xi \geq x) = x P(\xi \geq x)$$

$$P(\xi \geq x) \leq \frac{E \min\{\xi, x\}}{x} \quad \text{— усундсанас}$$

Ниса ξ — ниса ч. б. ч. $\exists E\xi^2$,

$$\text{төгс } P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2} \quad \text{— Чебышев}$$

$$\eta = |\xi - E\xi| \geq 0,$$

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) = P(\eta \geq x) = P(\eta^2 \geq x^2)$$

$$\leq \frac{E\eta^2}{x^2} = \frac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \frac{D\xi}{x^2}$$

$$\text{Сум } \xi: \exists x_0: F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases}$$

— ниса ч. б. ч. ниса ч. б. ч.

$$\Rightarrow P(|\xi - E\xi| \leq \frac{1}{2} \frac{D\xi}{x^2}) \quad \text{— Марков}$$

Ниса ч. б. ч. ниса ч. б. ч. ниса ч. б. ч.

⑤

$$P(|g - E g| \geq 3\sigma) \leq \frac{4\sigma^2}{9 \cdot 9\sigma^2} = \frac{4}{81} < 0,05$$

наименьшего из-за закона Д.

Пусть $g_1, \dots, g_n, \dots$ - н.о.р.с.б.

$$g_i = \begin{cases} 1 & \text{с.п.} \\ 0 & \text{и.п.} \end{cases}; S_n = g_1 + \dots + g_n \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\frac{1}{n} S_n \approx p, \quad P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i$$

$$E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n g_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E g_i = \frac{n}{n} E g_i = p$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} D \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \frac{n}{\varepsilon^2 n^2} D g_1 = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Закон Больцмана
иногда в виде формул
мат.

Пусть $g_1, \dots, g_n, \dots$ - н.с.б. $E g_i^2 < \infty$,

$$D g_i = \sigma_i^2,$$

$$E g_i = a_i$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow 0 \quad (когда)$$

$$D g_i = \sigma_i^2, i \geq 1 \rightarrow \frac{\sigma_i^2}{n} \rightarrow 0$$

Закон Больцмана
иногда в форме
формулы

Если a_i по $\sigma_i^2 < \infty$, то
оценки σ_i^2 и a_i .

оценивание
с помощью
доказательств.

$\exists g_1, \dots, g_n, \dots$ - н.о.р.с.б., $\exists E g_i = a_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i - a\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{— закон}$$

УДБ4 (Колмогоров)

н.о.р.с.б. $\exists g_1, g_2, \dots$ - н.о.р.с.б.

$$1) \exists a \in \mathbb{R} : P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = a\right) = 1 \quad (*)$$

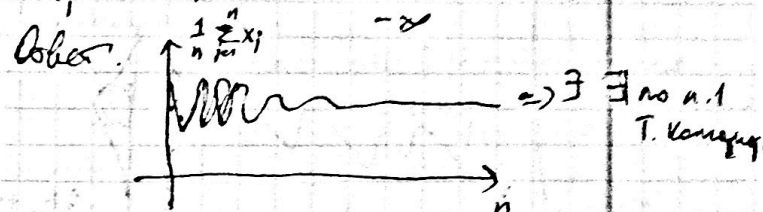
$$2) \exists E g_i = a,$$

2)

$$\exists E g_i = a \Rightarrow (*)$$

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые с.б.

$$X_i \sim F(x), \quad ? \exists a = \int x dF(x) ?$$



Если X_i - независимые с.б.

Пример $X_1, \dots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{с.п.} \\ 0 & \text{и.п.} \end{cases}$$

не-н-н-н

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx p$$

с.п. - и.п.
(закон
от с.п.и.п.)

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq \gamma,$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \geq \gamma$$

$$\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \leq 1 - \gamma, \quad n \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 (1-\gamma)}$$

$$\exists \frac{1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \Rightarrow n \geq \frac{10^3}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{n}\right| \leq \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) -$$

$$- \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq \gamma$$

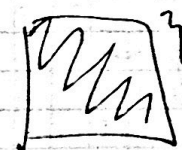
$$\Phi(u_2) = \alpha;$$

α -квантили;

$$\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}} \geq u_{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad n \geq u_{\frac{\gamma+1}{2}}^2 \cdot \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{\gamma+1}{2} = 0,975; \quad u_{0,975} \approx 1,96 \Rightarrow n \geq 10^6$$

Решение задачи



$$\lambda_0 < \lambda_1$$

$$\lambda_0 = \lambda_1$$

$$\lambda_0 > \lambda_1$$

$$N = n, \quad \text{Pois}(\lambda_1)$$

н.о.р.с.б.
и.п.и.п.
и.п.и.п.

New Lecture

$$f_n(\omega) \approx f(\omega) \quad \forall \omega$$



$$F_{g_n}(x) \approx F_g(x)$$

Then we get:

$$\textcircled{2} f_n \rightarrow f \text{ n.u., then } P(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)) = 1.$$

nicht konvergenz n.u. $\textcircled{1} f_n \xrightarrow{P} f$
 $\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{\omega: |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$

Ch. 6
 Ch. 6
 $\textcircled{3} f_n \xrightarrow{L^p} f$, dann
 $E|f_n - f|^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$\textcircled{4} f_n \xrightarrow{d} f$, dann
 $F_{f_n}(x) \rightarrow F_f(x) \quad \forall x: F_f \text{ stetig.}$

Ch. 6
 $\textcircled{5} f_n \xrightarrow{w} f$, dann
 $E f(f_n) \rightarrow E f(f)$ strenger, ap. f. x.

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{4} \Leftrightarrow \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{3}, f \text{ stetig. n. p. n. b. n. n. x.}$$

One question: $F(x)$ nicht glatt
 p. n. n. n. n. n.

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$P(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \frac{E|f_n - f|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow{p \rightarrow 1} 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

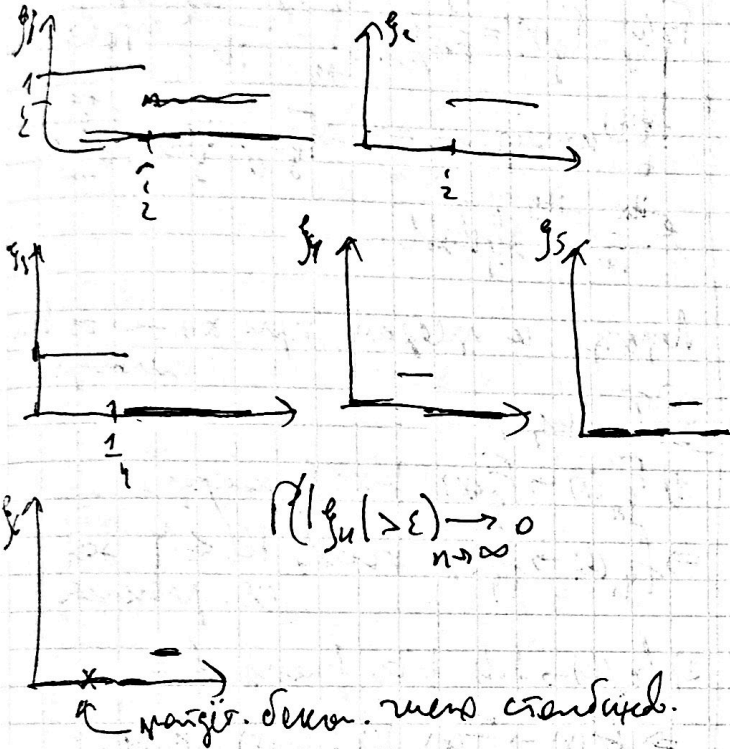
$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\text{I. } f_n \rightarrow f \text{ n.u. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |f_k - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C} \quad P(\eta=a)=1.$

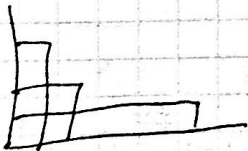
Пример? $f_n \xrightarrow{P} 0, P(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0) = 0.$ ①+②
 т.е. $P(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = 0) = 0$
 (Е913, $\mathcal{B}_{\text{Е913}}, \mu$)
 иже дефиниция $P_{\text{огр.}} = \text{жирная}$.



① $\Rightarrow$ ②:

Пример: $f_n \xrightarrow{L_p} 0, P(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = 0) = 0.$
 $D=1: E|f_n| \rightarrow 0$
 мон.

② $\Rightarrow$ ③:



① $\Rightarrow$ ②:

В курс Г. Пагелера самое интересное
 мин. макс.
 $H(\eta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_\eta(x) \cdot \log p_\eta(x) dx$

Показ на основе априори:

$\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, где $\eta = f(\vec{\eta})$

Предположим,
 f - гом. отображение, что можно предположить
 и η_j - сдв. независимы.
 Будем считать, что $n \rightarrow \infty$
 и рассмотрим случай η , как предельный случай.
 $\Delta S \geq 0 \Leftrightarrow$

Пусть $g, f_g(t) = E e^{itg} = E \cos tg + i E \sin tg$
 $t \in \mathbb{R}, e^{itg} = \cos tg + i \sin tg$ новое представление

$g \sim p_g(x) \Rightarrow f_g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_g(x) dx$

$f_g(t)$ - характеристическая функция.

$|E e^{itg}| \leq E |e^{itg}| = 1.$

① $f_g(t)$ - непрерывна в 0. (близко к 1.)

② $f_g(t)$ непрерывна.

Пусть $h > 0$, то $|f_g(th) - f_g(t)| = |E e^{itthg} - E e^{itg}|$
 $\leq |E [e^{itthg} - e^{itg}]| \leq E |e^{itthg} - e^{itg}|$
 $= E |e^{itg} (e^{itth} - 1)| \leq E |e^{itg}| |e^{itth} - 1| = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} - 1| dF_g(x) \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, M > 0 \Leftrightarrow \int_{|x| \leq M} |e^{itx} - 1| dF_g(x) + \int_{|x| > M} |e^{itx} - 1| dF_g(x) \leq \varepsilon$

$\leq I_1 + I_2 \Leftrightarrow$

$I_2 = 2 \int_{|x| > M} |F_g(x)| = 2P(|g| > M) \leq \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon): I_2 \leq \varepsilon \quad F_g(-M) + 1 - F_g(M)$
 $M \rightarrow \infty$

$\Leftrightarrow \int_{|x| < M(\varepsilon)} |e^{itx} - 1| dF_g(x) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$

③ $f_{a+ib}(t) = E e^{i(a+ib)t} = e^{ibt} E e^{iat} = e^{ibt} f_a(t)$
 $\cdot f_b(it)$

④ $f_1, \dots, f_n$ - н.с.б. ($n > 1$), тогда

$f_{g_1 + \dots + g_n}(t) = \prod_{j=1}^n f_{g_j}(t)$

$E e^{it(g_1 + \dots + g_n)} = E e^{itg_1} \cdot E e^{itg_2} \cdot \dots \cdot E e^{itg_n} = \prod_{j=1}^n f_{g_j}(t).$

Если н.с.б. $\Rightarrow f_{g_1 + \dots + g_n}(t) = [f_{g_1}(t)]^n = \dots = \prod_{j=1}^n f_{g_j}(t).$

$$\textcircled{5} \text{ If } |g|^k < \infty \Rightarrow f_g^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathbb{E} g^k$$

$$(f_g^{(k)}(t))' = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_g(x) \right)' = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} dF_g(x)$$

$$f_g'(0) = i \mathbb{E} g, \text{ где по теореме}$$

Если $k=2m \Rightarrow$ обратное тоже верно.

$$\textcircled{6} \text{ If } |g|^k < \infty \Rightarrow f_g(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} f_g^{(j)}(0) + o(t^k) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} f_g^{(j)}(0) + o(t^k) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(it)^j}{j!} \mathbb{E} g^j + o(t^k)$$

$$\textcircled{7} f_g(-t) = f_{-g}(t) = \overline{f_g(t)}$$

$f_g(t)$ - бер. $\Rightarrow$ гугн-е р-е симметр. $\Rightarrow$ эрмита.

Пример cost - бер. -е гугн-е?

$$\text{cost} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$f_g(t) = \mathbb{E} e^{itg} \quad g = \begin{cases} 1 & \text{с } 1/2 \\ -1 & \text{с } 1/2 \end{cases}$$

$$P(g=a) = 1 \Rightarrow f_g(t) = e^{iat}$$

$$f_g(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-x} dx \quad P(g=x) = 1-e^{-x}, x>0$$

$$\int_0^{\infty} e^{x(1-it)} dx = \frac{1}{1-it}$$

$$f(t) = \frac{1}{1-it} \text{ имеет ли характер?}$$

$$f(t) = \frac{1+it}{1+it} = \frac{1}{1+it^2} + i \frac{t}{1+it^2}$$

$$f(-t) = f(t)$$

? $f(t) = f(-t) \Rightarrow$ не аб-е хар-ой.

⑧ Т. (Бохнер, Хинчин)

Характер $f, f(0)=1$ аб-е хар. $\Leftrightarrow$

$\forall n, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^n f(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0. \quad \text{налем. отриц. гугн-м.}$$

⑨ g абс. хар. $\Rightarrow f_g(t) \rightarrow 0$ ($|t| \rightarrow \infty$)

⑩ $\exists a, h: \sum_{k=0}^{\infty} P(g=a+kh) = 1 \Rightarrow g$ периодич.

mm $\leftarrow$ max периодическо распр.

$$|f(\frac{2\pi}{h})| = 1 \quad g \text{ - перм.}$$

⑪ Ф-ин эксп-е:

Пусть x, y - т. непрерыв.

$$F_g(y) - F_g(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_g(t) dt$$

$$F_g(y) - F_g(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_g(t) dt$$

$$\frac{f_g(t)}{t} \text{ непрерыв. на } \infty \Rightarrow F_g(y) - F_g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_g(t) dt$$

Аналогично к результату при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$.

⑫ Т. непрерыв-ти.

1) $F_{g_n}(x) \rightarrow F_g(x), \forall x: F_g$ непрерыв.

$\Rightarrow f_{g_n}(t) \rightarrow f_g(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| \leq M$ и ∞ п.п. на ∞ .

2) $f_{g_n}(t) \rightarrow f(t), \forall t, f$ непрерыв. в 0

$\Rightarrow F_{g_n}(x) \rightarrow F_g(x), \forall x: F_g(x)$ - непрерыв. ; $f(t) \equiv f_g(t)$

Пример

$g \sim \text{Pois}(1) \Rightarrow g = g_1 + \dots + g_n$

$$g_i = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases} \Rightarrow f_{g_i}(t) = [pe^{it} + (1-p)]^n$$

$$\Rightarrow [1 + p(e^{it} - 1)]^n \quad e^{it} p + (1-p)$$

Пример

$$g \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow f_g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}, \quad p_0 = 1, n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow f_g(t) \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

Ка работа

Уд. п.т.

Пусть $\mathbb{E} g^2 < \infty, \mathbb{E} g = a, Dg = \sigma^2$

$S_n = S_{n-1} + g_n$ / $g_1, g_2, \dots$ — н. о. р.
 $f(t) = E e^{itg}$

$P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$
 $x \in \mathbb{R}$

равн. н. о. р. $\times$ (г. н. о.)
 (теор. Дини)

Пусть $\eta \sim \Phi(x)$, т.е. η — стандартн. норм. р. н. о. р.

$f_\eta(t) = E e^{it\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$f'_\eta(t)$, 'нет', $f'_\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$

$x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -de^{-\frac{x^2}{2}}$ т.к. интегр. н. о. р.

$\ominus -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} de^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$

$+\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} de^{itx} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$f'_\eta(t) = -t f_\eta(t)$, н. о. р. $f_\eta(0) = 1$

$\Rightarrow f_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, сл. о. о. $a = 0$.

$E \exp\left\{it \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \left(f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$

Пусть $f(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} E g^j + o(t^k)$
 (т.к. $E g^j = 0$ для нечетных j)

$\Rightarrow f(t) = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2)$

$\ominus 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Пусть $g_1, g_2, \dots$ — н. о. р.; $E g_j = a_j$,
 $a_1 + a_2 + \dots = A_n$,
 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots = B_n$,
 $D g_j = \sigma_j^2$

Если $P(g_1 < n) = 1 - e^{-x}$

то $E |g_j - a_j|^3 = \mu_j^3 = E |g_j - a_j|^3$

$\mu_1^3 + \dots + \mu_n^3 = M_n^3$

$\frac{M_n^3}{B_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (**)
 (**) — достаточное условие

1921 Л. В. Дини: (***)

$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x-a_j| > \varepsilon \sqrt{B_n}} (x-a_j)^2 dF_j(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\forall \varepsilon > 0$

$F_j(x) = P(g_j < x)$ (***), $\Rightarrow$ (2)

$\frac{n}{B_n^2} \int_{|x-a| > \varepsilon \sqrt{n}} (x-a)^2 dF_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 dF_1(x) < \infty$?

1930 W. Feller

$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\left|\frac{g_k - a_k}{B_n}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (***)

— эквив. равенств
 пред. теор.

$\{ (***) \} \Leftrightarrow \{ (***) \}$

$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\left|\frac{g_k - a_k}{B_n}\right| > \varepsilon\right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{P g_k}{B_n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

невозм. иметь н. о. р.
 равномерно
 (бесконечное)

$\max_{1 \leq k \leq n} P\left(\left|\frac{g_k - a_k}{B_n}\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^n P\left(\left|\frac{g_k - a_k}{B_n}\right| > \varepsilon B_n\right) =$

$= \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} 1 \cdot dF_k(x) = \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} \frac{(x-a_k)^2}{(x-a_k)^2} dF_k(x) \leq$

$\leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \leq$

$\leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} |x-a_k|^3 dF_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} |x-a_k|^3 dF_k(x) \leq$

$\leq \frac{M_n^3}{\varepsilon^2 B_n^3}$

Можно показать, что $\sup_x \left| P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq$

$\leq C \frac{n \mu_1^3}{B_n^3 \sigma^2} = C \frac{\mu_1^3}{\sigma^2 B_n^2}$

то $\sup_x \left| P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq C \left(\frac{1}{B_n^2} + \frac{1}{B_n^3} \right)$
 — достаточное условие

Иногда покажут, что $C_0 > 0,1097$
 1982 $C < 0,99$
 $C < 0,96$ $C < 1,32$

New Lecture

$X_1, \dots, X_n$; $X = a + \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$
 $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$

избавимся от $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathbb{P})$
 если от нас в совокупности,
 если X_i — независимы, то $\Rightarrow$ независимые случайные величины

стохастическая структура

$\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$

семейство распределений

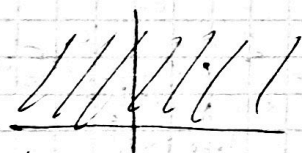
Задача: найти те распр., которые совпадают с выбранными

Далее будем рассматривать только: независимые выборки

$\mathcal{X} = \{x\}$, параметры: $\Theta = \{\theta\}$, $x \in \Theta$

$\{N(a, \sigma^2) : a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ — семейство

те параметров



Эти параметры и не параметр. статистики

Задача: $\hat{\theta}(X) \approx \theta$
 выборка

$\theta \in \mathbb{R}$ 2) $P_\theta(\hat{\theta}(X) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(X)) \approx \gamma \forall \theta \in \Theta$

3) $H_0 : \theta = \theta_0$
 α — вероятность ошибки

Задача непараметрической статистики

$X = (X_1, \dots, X_n)$

$X_i \sim F(x) = P(X_i \leq x)$, $EX_i = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx EX_i$, $DX_i = E(X_i - EX_i)^2$

ЗБЧ: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = EX_1) = 1$

$$E\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = EX_1$$

$$DX = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2, S^2 \approx DX_1?$$

$$ES^2 = E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a + a - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2 =$$

$$= E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(X_i - a)^2 + (a - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2 - 2(X_i - a)(a - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)] =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - a)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(a - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2 -$$

$$- \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - a)(a - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n} =$$

$$= \sigma^2 \frac{n-1}{n} \Rightarrow S^2 \cdot \frac{n}{n-1} = \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

$$EX_i^k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k \text{ по ЗБЧ}$$

ЗБЧ: Колмогоровский закон — н.с.р. — л.

1) $EX_i = a \Rightarrow P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = a) = 1$

2) $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow EX_j = a$

Для степеней X^k также

$$\mu_k = EX_i^k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k = m_k$$

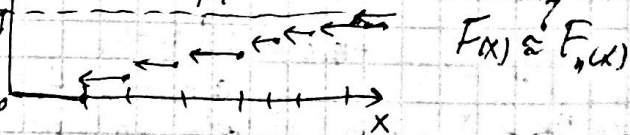
$$\exists \mu_k, DX_i^k = \mu_k - (\mu_k)^2$$

$$P(\frac{m_k - \mu_k}{\sqrt{\mu_k - (\mu_k)^2}} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замечание: $M_k \rightarrow M_{2k}$ и $M_{2k} \rightarrow M_k$ $\alpha \approx \gamma$

$$\mathbb{I}(X_i < x) = \begin{cases} 1 & \text{если } 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i < x) \text{ — эмпирическая ф. распредел.}$$



$$EF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\mathbb{I}(X_i < x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(X_i < x) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x) = F(x)$$

$$F_n(x) \geq F(x), \mathbb{I}(X_i < x) = \begin{cases} 1, & \text{если } F(x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{лемма Берн. } F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

$F_n(x)$ — эм. ф. распредел. от x и берн.

интервалы
не пересекаются
(disjoint)

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

$P_k = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}(X_j \in \Delta_k); f_n(x) = \frac{P_k}{n}, x \in \Delta_k$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

д. н.р. - $\Phi(x), F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$

$(f_n^*)' = f_n'(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$ - непарная д. н.р.

$\Phi(x)$ - эрф., φ - д. н.р. функции норм.

Примеры:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = 1$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



$h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ соотв. $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ New variable (K^n, β_n, P)

Def $T(X)$ - статистика, если она не зависит от θ и измерима по $\mathcal{H}$

$T(X): K^n \rightarrow \mathcal{X} \subseteq K^m$ $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$

Def $T(X)$ в $\mathcal{H}$ -н. пространстве $\mathcal{B}^m$ - статистика

Def $\mathbb{E} T(X) = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$
имеет место по мере P_θ

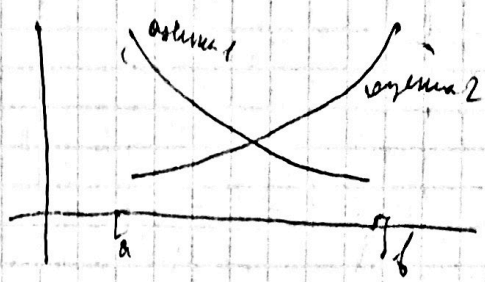
$T_n(X) := T(X)$

Def $R_n(X) = P_n \rightarrow 0 \quad \forall \theta \in \Theta$

Пусть $R(\theta) = \mathbb{E}_\theta (T(X) - \theta)^2$
квадратичная функция потерь
если $\mathbb{E}_\theta T(X) = \theta \Rightarrow R(\theta) = D_\theta T(X)$

Пусть, если $X_1, \dots, X_n$ из $U[a, b]$

$X_{(1)} \approx \theta$
 $2\bar{X} \approx \theta - \mathbb{E}(2\bar{X}) = \theta$
если $\theta = [a, b]$ а $\mathbb{E} X_{(n)} \neq \theta$



$M_1 = \max_{\theta} R_{T_1}(\theta)$
 $M_2 = \max_{\theta} R_{T_2}(\theta)$
 $M_1 < M_2 \Rightarrow T_1$ лучше, чем T_2 .
Минимум потерь.

$B_1 = \int R_{T_1}(\theta) \varphi(\theta) d\theta$
 $B_2 = \int R_{T_2}(\theta) \varphi(\theta) d\theta$
 $B_1 < B_2 \Rightarrow T_1$ лучше, чем T_2 .
Байесовский подход

Как правило, удобно выбрать $\varphi(\theta)$:
 $\varphi(\theta) \geq 0$ и $\int \varphi(\theta) d\theta = 1$

Получим, если θ - апри. распредел. γ ,
 B_1 и B_2 оптимальные значения,
иногда B_1 может быть больше B_2 .

Можно ли нам за это верить?

Def $P \ll Q$ если $J(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{H}, \forall \theta \in \Theta$
Всегда по какой-то мере Q мер.
 P доминирует над Q по мере Q .
Р-доминирующая мера, принцип, когда-то применялся (инвариантная)

$P(J \in A) = \sum_{X: X \in A} e^{-\theta} \frac{\theta^X}{X!} = \int p(X, \theta) d\mu(X)$
формула

$p(X, \theta) = \begin{cases} 0, & X \notin \{0, 1, 2, \dots\} \\ e^{-\theta} \frac{\theta^X}{X!}, & X \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$

Ц. Т. Рациональная функция $\Rightarrow$
если $P \ll Q \Rightarrow \exists p(X, \theta): P(A) = \int p(X, \theta) d\mu(X)$
 A измеримое
отн. к σ -алгебре $\mathcal{H}$.

Пусть $X_i \sim F(x, \theta), p(x, \theta)$

Def P -н. правдоподобие X по θ
 $l(\theta, X) = \prod_{i=1}^n p(X_i, \theta)$, т.е. л. н.р.

θ в каноническом представлении. θ, θ канонические параметры X

Пусть $X = \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow L(\theta; \vec{x}) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) = P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$, если X_i независимы, X (но не θ).

Опр. Φ -инвариантная функция X :

$$U(X, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; X)$$

$$E_\theta U(X; \theta) = \int U(\vec{x}; \theta) L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \int \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; \vec{x}) L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \int \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \frac{\partial}{\partial \theta} \int L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0.$$

$$\Rightarrow E_\theta U^2(X; \theta) = D_\theta U(X, \theta).$$

$$D_\theta U(X; \theta) = D_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; X) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \sum_{i=1}^n \ln p(X_i; \theta) = D_\theta \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X_i; \theta) = \sum_{i=1}^n D_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X_i; \theta) = n D_\theta \ln p(X_1; \theta) = n i_1(\theta), \quad i_1(\theta) \equiv i(\theta)$$

Опр. Φ -инвариантная $i_n(\theta)$ - каноническая Функция Фишера инвариантная, связанная с выбором X .

Пусть $T(X): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

Теор. Пусть $T(X)$ - каноническая функция Фишера. Тогда $K(T(X)): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $D_\theta T(X) \geq \frac{(i(\theta))^2}{n i(\theta)}$

$$E_\theta T(X) = \int T(\vec{x}) L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} =$$

$$i'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(\vec{x}) L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \int T(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = \int T(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; \vec{x}) d\vec{x}$$

$$= \int T(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; \vec{x}) L(\theta; \vec{x}) d\vec{x} = E_\theta [T(X) \cdot U(X; \theta)] = \text{Cov}_\theta(T(X), U(X; \theta))$$

$$(i'(\theta))^2 = (\text{Cov}_\theta(T(X), U(X; \theta)))^2 \leq \text{Cov}_\theta(T(X), U(X; \theta)) \cdot \text{Cov}_\theta(T(X), U(X; \theta))$$

$$\leq D_\theta T(X) \cdot D_\theta U(X; \theta)$$

$$\text{Следствие } i'(\theta) \leq D_\theta T(X) = i(\theta) + \text{Cov}_\theta(T(X), U(X; \theta))$$

Выбор $T(X)$ так, чтобы $i'(\theta)$ зависела от θ .

Опр. Если существуют, которые образуют каноническую функцию Фишера $X_1, \dots, X_n: X_i \sim N(\theta, 1)$

$\theta \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ где $\bar{X}$ - среднее арифметическое

Пусть $X_1, \dots, X_n: X_i \sim U[0, \theta]$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n), P_\theta(X_{(n)} \leq x) = P_\theta(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i \leq x) = (F(x; \theta))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$p_{X_{(n)}}(x; \theta) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, \quad E X_{(n)} = \int_0^\theta x \cdot \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{n+1} \theta$$

$$T = \frac{n+1}{n} X_{(n)} \Rightarrow E_\theta T = \theta, D_\theta T = E_\theta T^2 - \theta^2 = E_\theta \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 X_{(n)}^2 - \theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2} E_\theta X_{(n)}^2 - \theta^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \int_0^\theta x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx - \theta^2 = \frac{(n+1)^2 n}{n^2(n+2)} \theta^2 - \theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \theta^2 - \theta^2 = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2$$

Missing Lecture

New Lecture

Находимся в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P} = \{P_\theta: \theta \in \Theta\})$

$T(X), X = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim U[0, \theta]; \theta \approx 2\bar{X}$

Опр. $\mathcal{G}$ -каноническая, если $E_\theta(X | T(X))$ не зависит от θ

Т. (Критерий каноничности) $T(X)$ каноническая $\Leftrightarrow L(\theta; X) = g(\theta; T(X)) \cdot h(X)$

$$\Leftrightarrow \forall t \quad P_\theta(X = x | T(X) = t) = h(x; t), \quad \int T(X) = t, \quad x, t \text{ где нех.}; \quad L(\theta; x) = P_\theta(X = x)$$

$$\Leftrightarrow P_\theta(X = x; T(X) = t) = P_\theta(T(X) = t) \cdot P_\theta(X = x | T(X) = t)$$

$$T(X) = t \Rightarrow g(\theta, t) \cdot h(x, t); \quad \Leftrightarrow L(\theta; x) = g(\theta, T(X)) \cdot h(X), \quad \int x, t: T(X) \neq t;$$

$$P_\theta(X = x | T(X) = t) = \frac{P_\theta(X = x, T(X) = t)}{P_\theta(T(X) = t)} = \frac{P_\theta(X = x)}{P_\theta(T(X) = t)}$$

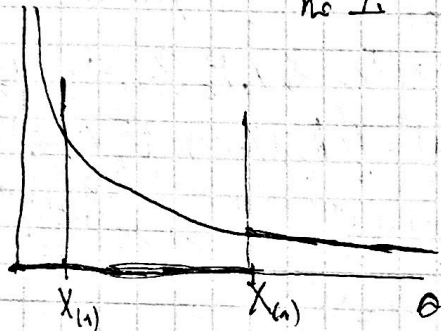
$$\Leftrightarrow \frac{L(\theta; x)}{\sum_{x: T(X)=t} L(\theta; x)} = \frac{g(\theta, T(X)) \cdot h(x)}{\sum_{x: T(X)=t} g(\theta, T(X)) \cdot h(x)} = \frac{g(\theta, t) \cdot h(x)}{g(\theta, t) \cdot \sum_{x: T(X)=t} h(x)}$$

зависит от θ .
 Если $x \neq T(x) \Rightarrow$ не ун.
 фр. $\Rightarrow 0$ и нулевые условия
 вкл-е тривиально.

$$X_i \sim U[0, \theta], X_i \sim p(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(0 \leq x \leq \theta)$$

$$L(\theta; X) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}(0 \leq X_i \leq \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}(0 \leq X_{(n)})$$

$\leq X_{(n)} \leq \theta$; $X_{(n)}, X_{(n)}$ - гом. статист.
 по I



$$T(X) = \tau(\theta) + c(\theta) U(X; \theta) = \tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; X) = \tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left(\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}(0 \leq X_{(n)} \leq \theta) \right)$$

$$h(X) = \tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log(\dots)$$

Гом. зависит от θ (хотя бы из-за др. слагаемых)

I (Блакман, Коммерсолов)

$$\mathbb{E}_\theta S(X) = \theta; T(X) \text{ - гом.}$$

$$W(X) = \mathbb{E}_\theta (S(X) | T(X)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_\theta W(X) \leq D_\theta S(X)$$

W не зависит от θ , т.к. $T(X)$ - гом.

$$\mathbb{E}_\theta W(X) = \mathbb{E}_\theta \mathbb{E}_\theta (S(X) | T(X)) = \mathbb{E}_\theta S(X) = \theta$$

$$D_\theta W(X) = \mathbb{E}_\theta (W(X) - \theta)^2$$

$$D_\theta S(X) = \mathbb{E}_\theta (S(X) - \theta)^2 = \mathbb{E}_\theta (S(X) - W(X) + W(X) - \theta)^2 =$$

$$\mathbb{E}_\theta (S(X) - W(X))^2 + \mathbb{E}_\theta (W(X) - \theta)^2 + 2 \mathbb{E}_\theta (S(X) - W(X))(W(X) - \theta)$$

$$(S(X) - W(X))(W(X) - \theta) + D_\theta W(X).$$

$$\mathbb{E}_\theta (S(X) - W(X))(W(X) - \theta) =$$

$$= \mathbb{E}_\theta \mathbb{E}_\theta [(S(X) - W(X))(W(X) - \theta) | T(X)] =$$

$$= \mathbb{E}_\theta [(W(X) - \theta) \mathbb{E}_\theta [S(X) - W(X) | T(X)]]$$

$$\text{умн.} + \mathbb{E}_\theta W(X) = \theta$$

$$\mathbb{E}_\theta (S(X) | T(X)) - \mathbb{E}_\theta (W(X) | T(X)) = W(X) - W(X) = 0.$$

Дип. $T(X)$ - полный, если

$$\mathbb{E}_\theta g(T(X)) = 0 \forall \theta \Rightarrow g(t) = 0$$

$$\int g(t) p_T(t; \theta) dt = 0$$

I. $T(X)$ - полный, гом. статистика
 $S_1(X), S_2(X)$ - несмещ. оценки параметра θ .

$$W_1(X) = \mathbb{E}_\theta (S_1(X) | T(X)) \Rightarrow W_1 = W_2 \text{ н.к.}$$

$$W_2(X) = \mathbb{E}_\theta (S_2(X) | T(X))$$

$$\theta = \int L(\theta; x) W_1(T(x)) J(\theta) d\theta$$

$$\theta = \int L(\theta; x) W_2(T(x)) J(\theta) d\theta$$

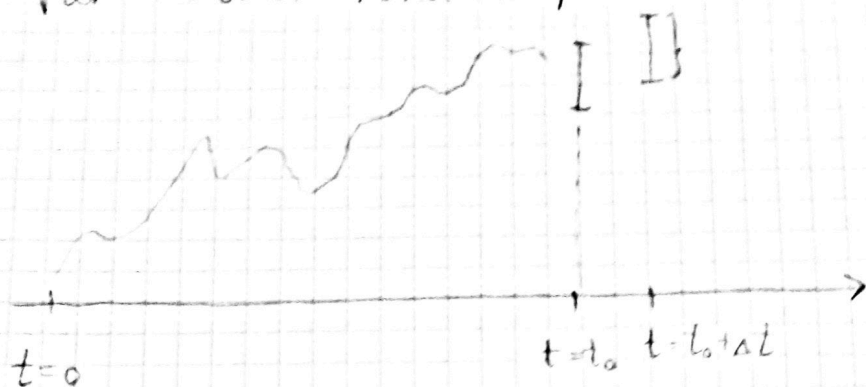
$$0 = \int (W_1(T(x)) - W_2(T(x))) L(\theta; x) J(\theta) d\theta \forall \theta$$

$$\Rightarrow W_1(T(X)) = W_2(T(X)) \text{ н.к.}$$

Дип. Несмещ. оценки с равн. или гиперсеч. ка-се оптимальной.

Value at Risk

VaR - наименьшая потеря



$$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}): X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

$$P(X_{(1)} < x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} < x) =$$

$$1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) \stackrel{\text{нез.}}{=} \downarrow$$

$$1 - P(X_1 \geq x) \dots P(X_n \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x)) =$$

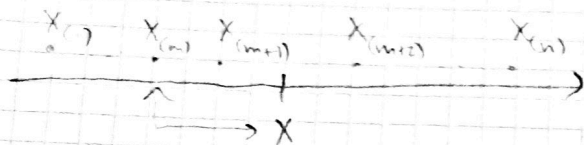
$$1 - (1 - F(x))^n \neq F(x)$$

$$\exists \text{ распр-я: } 1 - (1 - F(x))^n = F(ax)$$

$$P(X_n < x) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} < x) = F(x)^n$$

$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ - вариационный ряд
 $X_{(i)}$ - i -я порядк. статистика

$$P(X_{(m)} < x)$$



$$m, m+1, \dots, n$$

$V_n(x)$ - число элементов выборки, $< x$

$$V_n(x) \sim \text{Bi}(n, F(x))$$

$$\{X_{(m)} < x\} = \{V_n(x) \geq m\}$$

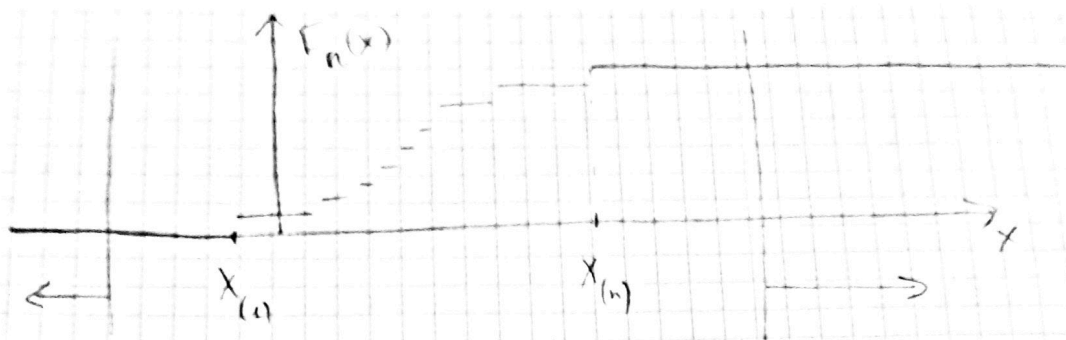
$$P(X_{(m)} < x) = P(V_n(x) \geq m) = \sum_{k=m}^n C_n^k (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

Хотим найти квантили $y \in (0, 1)$

$$F^{-1}(y) \approx X_{(\lceil ny \rceil)}$$

$$\text{Д-то, что при } n \rightarrow \infty \quad X_{(\lceil ny \rceil)} \rightarrow F^{-1}(y)$$

$$F(X_{(k)}) \stackrel{d}{=} U_{(k)} \quad (\text{порядковая статистика из р/м выборки})$$



⊖ Нельзя оценить вероятности редких событий
Разрывка

⊕ Можно посчитать
Зависит от выборки

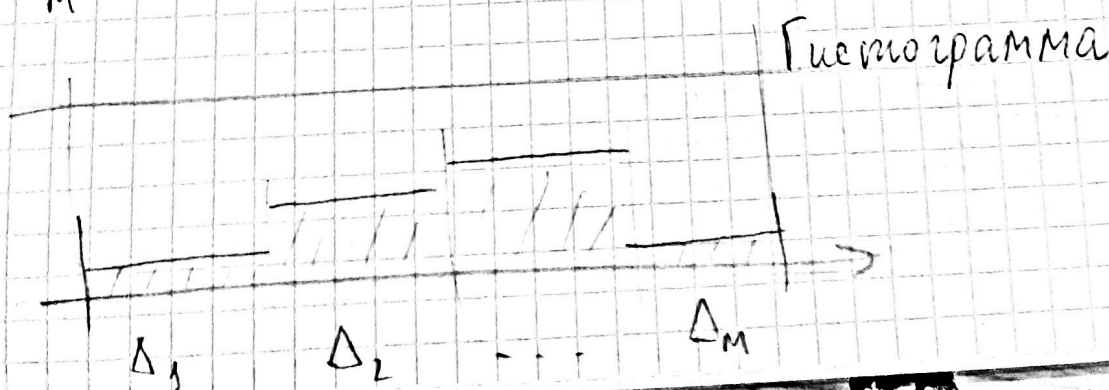


Возьмём $M \in \mathbb{N}$

Разделим интервал $[x_{(1)} - \varepsilon, x_{(n)} + \varepsilon]$ на M частей

$$M_k = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}(X_j \in \Delta_k)$$

$$f_M(x) = \frac{M_k}{n}, x \in \Delta_k$$



$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ \text{усл. совп} \end{array} \right\} f_n(x) \rightsquigarrow f(x)$$

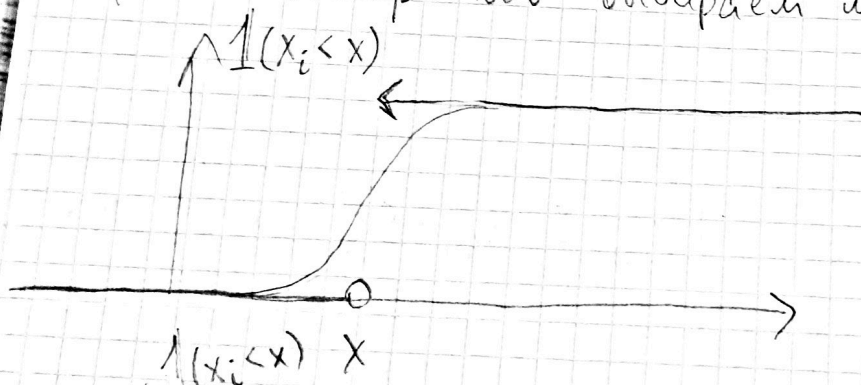
⊕ Существует
Как-нибудь сходится
Сглаживание

⊖ Разрывна
Не оценить редкие события



Полигон ↗

M выбираем мы
Длину интервалов выбираем мы



$$\Phi(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

$\phi(x)$ - ядро

$f_n^*(x)$ - ядерная оценка плотности

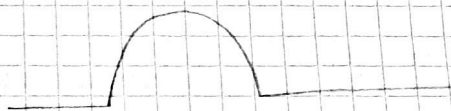
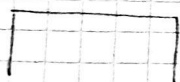
h - ширина окна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x) dx = 1$$

Варианты нормал-и

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

параметры?



параболы

Для $h = h_n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$
усл. еогр. $\left. \vphantom{\begin{matrix} h = h_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{matrix}} \right\} f_n^*(x) \rightsquigarrow f(x)$

$$f_n^*(x) \rightsquigarrow f(x)$$

25.02.20

Задачи параметрической статистики

$$X = (X_1, \dots, X_n) \quad (R^n, \mathcal{B}_n, P)$$

Пусть $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$

Выбираем модель с $P_{\theta_{\text{best}}}$

Определение.

Функция $T(X)$ называется статистикой, если она

1) не зависит от θ

2) измерима

$$T(X): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$\{\mathcal{X}, \mathcal{A}\}$ (если $\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}_m$).

$$T(X) \approx \theta \quad \leftarrow \text{хотим}$$

Если $T(X)$ -статистика со значениями в (H) , то она называется оценкой

$$T(X): \mathbb{R}^n \rightarrow (H) \quad \text{— оценка}$$

$$\underbrace{E_{\theta} T(X)}_{\text{интеграл по мере } P_{\theta}} = \theta \quad \forall \theta \in (H) \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \text{(несмещённость)} \\ \text{estimator} \end{matrix}$$

Несмещённые оценки

$$T(X) = T_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_{\theta}} \theta \quad \forall \theta \in (H)$$

Состоятельные оценки

$$T_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н. } \theta} \theta \quad \forall \theta \in (H) \quad \text{— сильно состоятельные}$$

$$E(T(X) - \theta)^2 = R(\theta)$$

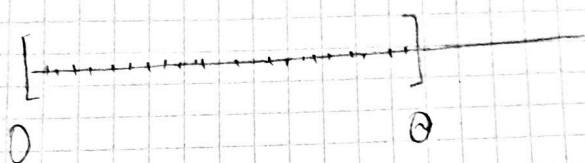
квадратичный риск оценки T

$$E_{\theta} T(X) = \theta \Rightarrow R(\theta) = D_{\theta} T(X)$$

используем $R(\theta)$ для оценки точности оценки

Задача.

$$X_1, \dots, X_n \sim U[0, \theta]$$

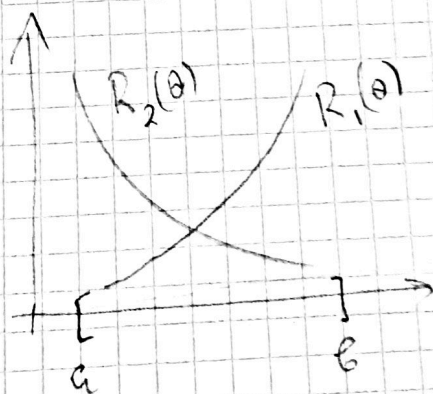


$$X_{(n)} \approx \theta \quad ?$$

$$2\bar{x} \approx \theta \quad ?$$

$\exists$ две разные оценки

$$\Theta = [a, b]$$

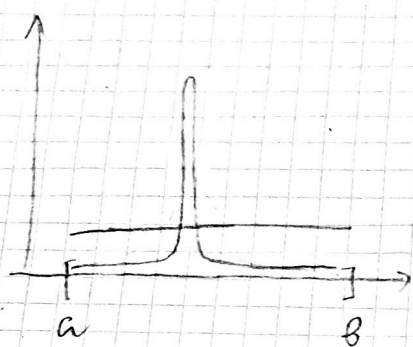


кто лучше?

$$m_1 = \max_{\Theta} R_1(\theta)$$

$$m_2 = \max_{\Theta} R_2(\theta)$$

$$m_1 < m_2 \Rightarrow T_1 \text{ лучше, чем } T_2$$



$$B_1 = \int R_{T_1}(\theta) \varphi(\theta) d\theta \quad \varphi(\theta) \geq 0$$

$$B_2 = \int R_{T_2}(\theta) \varphi(\theta) d\theta \quad \int \varphi(\theta) d\theta = 1$$

$B_1 < B_2 \Rightarrow T_1$ лучше, чем T_2
(Байесовский подход)

θ - не с.в., т.к. нет σ -алгебры на Θ

$\varphi(\theta)$ - не плотность

$\varphi(\theta)$ - вес, выделяет интересные как точки

Можно ли выбрать T (для фикс. n) так, чтобы

$D_\theta T(X) = 0$? Вряд ли

Слишком хорошо, чтобы быть правдой

Будем говорить, что P доминируется мерой ν , если

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow P_\theta(A) = 0 \quad P \ll \nu$$
$$\forall A \in \mathcal{B}_n, \forall \theta \in \Theta$$

Пример: $P = N(a, b^2)$. $\Theta = (a, b^2)$

Доминируется мерой Лебега

$$P = \{ \text{Pois}(\theta) : \theta > 0 \}$$

Считающаяся мера — $|\{N \cup \{0\}\} \cap [a, b]|$
счит. мера

$$\xi \sim \text{Pois}(\theta)$$

$$P(\xi \in A) = \sum_{x \in A} e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} = \int_A \underbrace{p(x, \theta)}_{\begin{cases} 0, & x \notin \{N \cup \{0\}\} \\ P(\xi = x), & x \in \{N \cup \{0\}\} \end{cases}} \nu(dx)$$

Если $P \ll \nu$, то

$$\exists p(x, \theta) : P_\theta(A) = \int_A p(x, \theta) \nu(dx)$$

Теорема Радо-Никодина

$$X_i \sim F(x, \theta)$$

$$p(x, \theta)$$

Функцией правдоподобия выборки называется

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^n p(X_i; \theta) \quad \leftarrow \text{это с.в.}$$

$\uparrow$ аргум $\uparrow$ парам $\uparrow$ аргум $\uparrow$ парам

Пусть $X = \vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ - наблюдаемые значения

$$L(\theta; \vec{X}) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \quad \leftarrow \text{нез-ть}$$

$$= P_{\theta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Вероятность наблюдать то, что мы наблюдаем
(в зависимости от θ)

(Вероятность конкретной выборки в вер. мюж. с $\theta = \theta_0$)

$$U(X; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, X) \quad \text{— функция вклада}$$

выборки X

$$\theta \in \mathbb{R}$$

Считаем, что $L(\theta; X)$ достаточно гладкая

$$E_{\theta} U(X, \theta) = ?$$

$$E_{\theta} U(X, \theta) = \int U(\vec{x}; \theta) L(\theta; \vec{x}) v(d\vec{x}) =$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; \vec{x}) \cdot L(\theta; \vec{x}) v(d\vec{x}) =$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; \vec{x}) v(d\vec{x}) \stackrel{\text{градиент}}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} \int L(\theta; \vec{x}) v(d\vec{x}) \stackrel{\substack{\text{нормализация} \\ L - \text{плотность}}}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0 \Rightarrow$$

$$E_{\theta} U^2(X, \theta) = D_{\theta} U(X, \theta) = i_n(\theta)$$

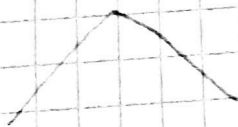
$$D_{\theta} U(X, \theta) = D_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; X) =$$

$$= D_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln(p(X_i, \theta)) = D_{\theta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(X_i, \theta)) \stackrel{\text{независ}}{=} \sum_{i=1}^n D_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X_i, \theta) \stackrel{\text{однород}}{=} n D_{\theta} U(X_i; \theta) = n i_1(\theta)$$

$$\sum_{i=1}^n D_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X_i, \theta) \stackrel{\text{однород}}{=} n D_{\theta} U(X_i; \theta) = n i_1(\theta)$$

$$D U(X, \theta) \sim O(\ln(X))$$

$i_n(\theta)$ — Фишеровская инф-я, содержащаяся в выборке размера n



Предположим, что

$$(*) \quad E_{\theta} T(X) = \tau(\theta) \quad (\text{естественным образом})$$

Теорема. (Фро, Крамер)

Предположим, что выполнены условия регулярности. Тогда

$$\forall T(X): (*)$$

$$D_{\theta} T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)}$$

$$\sqsubset \quad E_{\theta} T(X) = \int T(\vec{x}) L(\theta, \vec{x}) \nu(d\vec{x}) = \tau(\theta)$$

$$\tau'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int T(\vec{x}) L(\theta, \vec{x}) \nu(d\vec{x}) = \text{регулярность}$$

$$\int T(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, \vec{x}) \nu(d\vec{x}) =$$

$$\int T(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, \vec{x}) \cdot L(\theta, \vec{x}) \nu(d\vec{x}) =$$

$$\cancel{E T(\vec{x}) U(\vec{x})} \quad E_{\theta} [T(X) \cdot U(X, \theta)] =$$

$$\text{cov}_{\theta}(T(X), U(X, \theta))$$

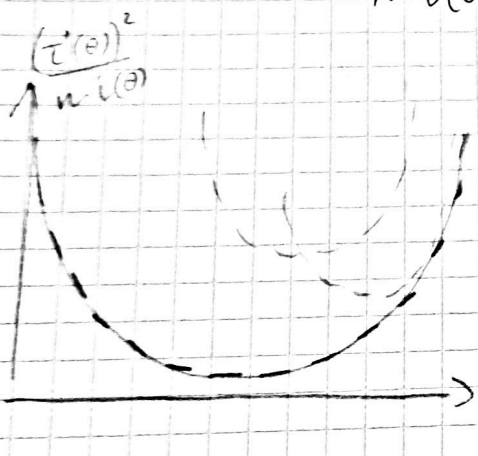
$$(\tau'(\theta))^2 = (\text{cov}_\theta(T(X), U(X, \theta)))^2 \leq D_\theta T(X) D_\theta U(X, \theta)$$

$$D_\theta T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{D_\theta U(X, \theta)} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)}$$

$i \sim \frac{1}{D}$, поэтому информация

Следствие:

$$D_\theta T(X) = \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)} \Leftrightarrow T(X) = \tau(\theta) + c(\theta) U(X, \theta)$$



$\exists T(X):$

$$D_\theta T(X) = \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)} \quad \forall \theta \in \Theta$$

— эффективная оценка

Задача: Пусть

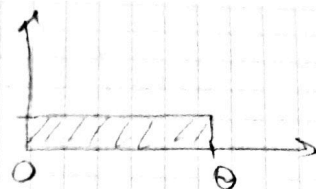
$$X_1, \dots, X_n: X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$$

$$\theta \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Д-ть, что $\bar{X}$ — эффект. оценка

Ещё раз вернёмся к

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim U[0, \theta]$$



$$P\text{-м } X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$P(X_{(n)} < x) = P(X_1 < x, \dots, X_n < x) \stackrel{\text{нез}}{=}$$

$$\prod_{i=1}^n P(X_i < x) = (F_{X_1}(x, \theta))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{I}(0 < x < \theta)$$

$$p_{X_{(n)}}(x, \theta) = \frac{n}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{I}(0 < x < \theta)$$

$$\mathbb{E}_{\theta} X_{(n)} = \int_0^{\theta} x \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n dx = \frac{n}{n+1} \theta \neq \theta$$

$$T = \frac{n+1}{n} X_{(n)}, \text{ тогда } \mathbb{E}_{\theta} T = \theta$$

$$\mathbb{D}_{\theta} T = \mathbb{E}_{\theta} T^2 - \theta^2 = \mathbb{E} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 X_{(n)}^2 - \theta^2 =$$

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \mathbb{E} X_{(n)}^2 - \theta^2 = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \int_0^{\theta} x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx - \theta^2 =$$

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{n}{n+2} \theta^2 - \theta^2 = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \theta^2 - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Внезапно лучше, чем теорема Раша, Крамера

3.02.20

$$E_{\theta} T(X) = \tau(\theta)$$

Рao-Крамера

$$D_{\theta} T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)}$$

$$X = (X_1, \dots, X_n), \quad X_i \sim p(x_i, \theta)$$

$$X_i \sim U[0, \theta]$$

$$\tilde{T}(X) = \frac{n+1}{n} X_{(n)} : \quad E_{\theta} \tilde{T}(X) = \theta$$

$$D_{\theta} \tilde{T}(X) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) ?$$

Как считать оцнки в непрерывном случае?

Условное математическое ожидание.

Пусть ξ, η - дискретные с.в.

$$\xi: x_1, x_2, \dots$$

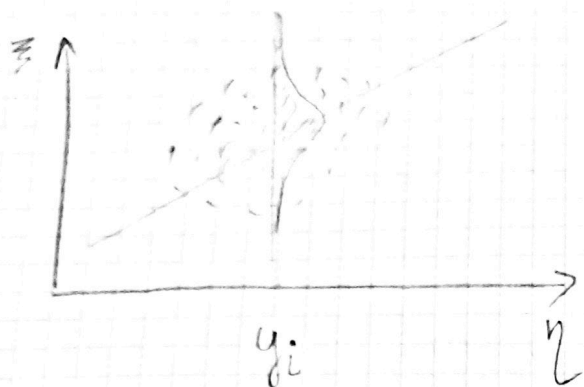
$$\eta: y_1, y_2, \dots$$

$$P(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)}$$

$$\sum_i P(\xi = x_i | \eta = y_j) = 1 \quad \text{распределение вероятностей}$$

$$E(\xi | \eta = y_j) = \sum_i x_i P(\xi = x_i | \eta = y_j) = f(y_j)$$

регрессия ξ на η



Френсис Гальтон

$f(\eta)$ - функция регрессии

регрессия - стремление к среднему

$$E(\xi|\eta) = f(\eta)$$

$$P(E(\xi|\eta) = f(y_j)) = P(\eta = y_j)$$

случайность $E(\xi|\eta)$
обусловлена
случайностью η

$$\forall B \in \beta \quad E[E(\xi|\eta) \mathbb{1}(\eta \in B)] =$$

$$\sum_{j: y_j \in B} f(y_j) P(\eta = y_j) = \sum_{j: y_j \in B} \left(\sum_k x_k P(\xi = x_k | \eta = y_j) \right) P(\eta = y_j) =$$

$$= \sum_{j: y_j \in B} \sum_k x_k P(\xi = x_k, \eta = y_j) = E[\xi \cdot \mathbb{1}(\eta \in B)]$$

$$\text{Т.е., } \forall B \in \beta \quad E[E(\xi|\eta) \mathbb{1}(\eta \in B)] = E[\xi \cdot \mathbb{1}(\eta \in B)]$$

Пусть $\xi, \eta \sim p_{\xi, \eta}(x, y) \geq 0$ Абс. непрерывн

$\forall B \in \mathcal{B}_2$

$$P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B p_{\xi, \eta}(x, y) dx dy$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(x, y) dx$$

$$P(\xi < x | \eta = y) = \frac{P(\xi < x, \eta = y)}{P(\eta = y)} = \frac{0}{0} \quad \therefore$$

$\varepsilon > 0$:

$$P(\xi < x | y \leq \eta \leq y + \varepsilon) = \frac{P(\xi < x; y \leq \eta \leq y + \varepsilon)}{P(y \leq \eta \leq y + \varepsilon)} =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\varepsilon} p_{\xi, \eta}(x, y) dy dx}{\int_y^{y+\varepsilon} p_{\eta}(y) dy} \stackrel{\substack{\text{Теорема} \\ \text{о среднем}}}{=} \frac{\int_{-\infty}^x p_{\xi, \eta}(x, y^*) dx \cdot \varepsilon}{p_{\eta}(y^*) \cdot \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$\exists y^*, y^{**} \in [y, y + \varepsilon]$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{p_{\xi, \eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} dx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

плотность

$$p_{z|\eta=y}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{z,\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)} \quad (\text{условная плотность})$$

$$E(z|\eta=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{z|\eta=y}(x) dx = f(y)$$

$$E(z|\eta) = f(\eta) \quad \begin{array}{l} \text{для } \forall B \in \beta \quad P(E(z|\eta) \in B) = P(f(\eta) \in B) = \\ P(\eta \in f^{-1}(B)) \quad - \text{случайность} \\ \text{только от } \eta \end{array}$$

$$\begin{aligned} \forall B \in \beta \quad E[E(z|\eta) \mathbb{1}(\eta \in B)] &= \\ &= E[f(\eta) \mathbb{1}(\eta \in B)] = \int_B f(y) p_{\eta}(y) dy = \int_B \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{p_{z,\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)} dx \right) p_{\eta}(y) dy \\ &= \int_B \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{z,\eta}(x,y) dx dy = E[z \mathbb{1}(\eta \in B)] \end{aligned}$$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P), F \subseteq \mathcal{A}$$

Определение.

С.в. η называется F-измеримой, если для $\forall B \in \beta \quad \eta^{-1}(B) \in F \Leftrightarrow \{\omega: \eta(\omega) \in B\} \in F$

η - с.в., если $\forall B \in \beta \quad \eta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$$(\eta \stackrel{\text{п.н.}}{=} c : \eta^{-1}(B) = \{\Omega\} \text{ или } \emptyset)$$

Определение.

Усл. мат. ожид. с.в. ξ относит. σ -алгебры $\mathcal{F}$ называется с.в. $E(\xi|\mathcal{F})$, такая что

1) $E(\xi|\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ -измерима

2) $\forall A \in \mathcal{F} \quad E[E(\xi|\mathcal{F}) \mathbb{1}(A)] = E\xi \cdot \mathbb{1}(A).$

Определение.

σ -алгебра $\mathcal{F}$ наз-ся порождённой с.в. η , если

$$\mathcal{F} = \{ \eta^{-1}(B); B \in \mathcal{B} \}.$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\eta).$$

Определение.

Усл. мат. ожидание с.в. ξ относит. с.в. η — это усл. мат. ожидание с.в. ξ относит.

σ -алгебры $\sigma(\eta)$

$$E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta)).$$

$$\mathbb{I}(A) = E[\xi \cdot \mathbb{1}(A)]$$

$$P(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{I}(A) = 0$$

$\forall$ абс. непрерывна относ. $P \rightarrow$

$\exists$ F -измеримая ф-я $E(\xi/F)$:

$$V(A) = \int_A \underbrace{E(\xi/F)}_{\text{однозначно}} dP \quad (\text{теор. Радо-Никодима})$$

$\Rightarrow$ ф-я из 2) существует

$$1) E(a\xi + b\zeta/F) \stackrel{\text{н.н.}}{=} a E(\xi/F) + b E(\zeta/F)$$

$$2) \eta - F\text{-изм.с.в.} \Rightarrow$$

$$E(\xi\eta/F) \stackrel{\text{н.н.}}{=} \eta E(\xi/F)$$

$$3) \xi, \eta - \text{незав.} \Rightarrow$$

$$E(\xi|\eta) \stackrel{\text{н.н.}}{=} E\xi$$

$$4) E[E(\xi/F)] = E\xi$$

$$P(A|F) = E(1(A)|F)$$

10.03.2020

$$E_{\theta} T(X) = \tau(\theta), \quad \theta \in \Theta$$

$$D_{\theta} T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n \cdot i(\theta)}$$

Θ - эффект. оценка

Оценки в регулярном случае?

Мы опять в $(R^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P} = \{P_{\theta} : \theta \in \Theta\})$

$T(X)$ - статистика. $X = (X_1, \dots, X_n)$

$T: X \rightarrow X$ имеет всю инф-ю о θ

$$X_i \sim U[0, \theta]$$

$$\theta \approx 2\bar{X}$$

от всех

$$\theta \approx \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

формально - от одного

более информативна:
почему?...

Статистика $T(X)$
называется достаточной, если

$$E_{\theta}(X | T(X)) \text{ не зависит от } \theta$$

T несёт инф-ю о θ , если она изменяется в зависимости от θ

Использование $\forall$ другой φ -и от данных не даёт новой ~~инф~~-и ~~от~~ θ .

Теорема. (критерий факторизации)

$$L(\theta, X) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

$X_i \sim p(x, \theta)$ относит. меры ν

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow P_\theta(A) = 0$$

Статистика $T(X)$ достаточна $\iff$

$$L(\theta; X) = g(\theta; T(X)) \cdot h(X)$$

Дискретный случай

1. $T(X)$ - достаточна

$$\forall t \quad P_\theta(X=x | T(X)=t) = h(x, t)$$

Рассмотрим $\boxed{x, t : T(x)=t}$

$$L(\theta, x) = P_\theta(X=x) \downarrow P_\theta(X=x, T(X)=t) = \\ P_\theta(T(X)=t) P_\theta(X=x | T(X)=t) \equiv$$

$$g(\theta, t) h(x, t)$$

$$2. L(\theta; X) = g(\theta, T(X)) \cdot h(X)$$

$$P_{\theta}(X=x | T(X)=t) = \frac{P_{\theta}(X=x, T(X)=t)}{P_{\theta}(T(X)=t)} =$$

$$\frac{P_{\theta}(X=x)}{P(T(X)=t)} = \frac{L(\theta, \overset{x}{\cancel{X}})}{\sum_{x: T(x)=t} L(\theta, x)} = \frac{g(\theta, T(x)) h(x)}{\sum_{x: T(x)=t} g(\theta, T(x)) h(x)} =$$

$$\frac{\cancel{g(\theta, t)} h(x)}{\cancel{g(\theta, t)} \sum_{x: T(x)=t} h(x)} - \text{не зависит от } \theta$$

А что где $x, t: T(x) \neq t$?

$L(\theta, x) = 0$, $P_{\theta}(X=x, T(X)=t) = 0$, пол-бо
т.е. не в.

$$X_i \sim U[0, \theta]$$

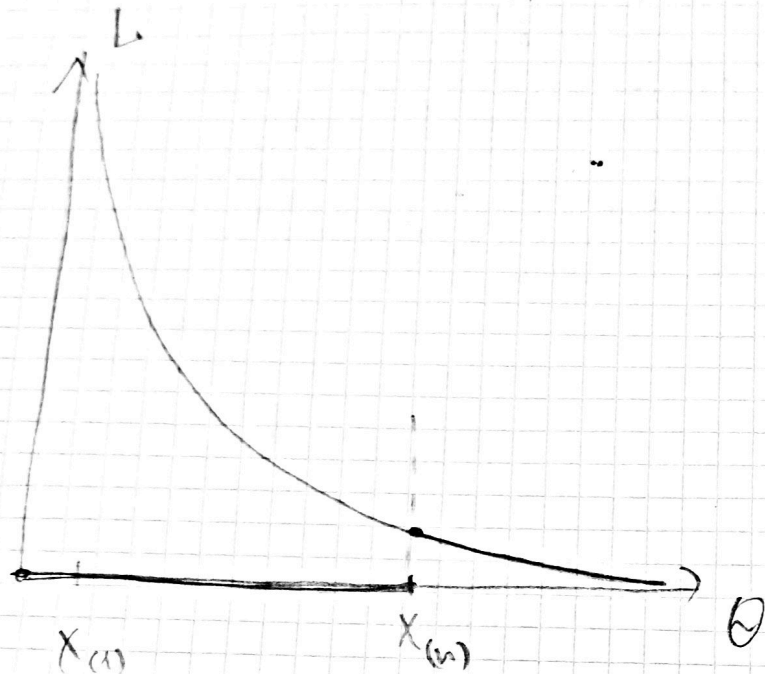
$$X_i \sim p(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(0 \leq x \leq \theta)$$

$$\cancel{L(\theta, X)} = L(\theta; X) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}(0 \leq X_i \leq \theta) =$$

$$\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}(0 \leq X_{(n)} \leq \theta) \cdot \mathbb{1}(0 \leq X_{(n)} \leq \theta)$$

По критерию фактор-и достаточная стат

$X_{(1)} \sim X_{(n)}$, но $X_{(1)} \leq X_{(n)}$



$X_{(n)}$ — достаточная статистика

Регулярный случай. Эффект. оценка

$$T(X) = \tau(\theta) + c(\theta) U(X, \theta)$$

$$U(X, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta, X)$$

$$T(X) = \tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta, X) =$$

$$\tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log [g(\theta; T(X)) h(X)] =$$

$$\tau(\theta) + c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log g(\theta, T(X))$$

Зависит от X только через $T(X)$

Теорема. (Блэнквелл, Колмогоров)

$$E_{\theta} S(X) = \theta; \quad T(X) - \text{дост}$$

$$W(X) = E_{\theta}(S(X)/T(X)) \Rightarrow$$

$$D_{\theta} W(X) \leq D_{\theta} S(X)$$

$$E_{\theta} W(X) = E_{\theta} E_{\theta}(S(X)/T(X)) = E S(X) = \theta$$

$$D_{\theta} W(X) = E_{\theta} (W(X) - \theta)^2$$

$$D_{\theta} S(X) = E_{\theta} (S(X) - \theta)^2 = E_{\theta} (S(X) - W(X) + W(X) - \theta)^2$$

$$= E_{\theta} \underbrace{(S(X) - W(X))^2}_{\geq 0} + 2 E_{\theta} (S(X) - W(X))(W(X) - \theta) +$$

$$D W(X)$$

$$E_{\theta} (S(X) - W(X))(W(X) - \theta) =$$

$$E_{\theta} E_{\theta} [(S(X) - W(X))(W(X) - \theta) | T(X)] =$$

$$E_{\theta}[(W(X) - \theta) E_{\theta}\{S(X)W(X)|T(X)\}] = 0$$

like const
(не зависит от θ)
 $E_{\theta} W(X) = \theta$

$$E_{\theta} W(X) = \theta$$

$$\Rightarrow D_{\theta} S(X) = \underbrace{\quad}_{\neq 0} + \underbrace{\quad}_{=0} + D_{\theta} W(X)$$

$$\Rightarrow D_{\theta} W(X) \leq D_{\theta} S(X)$$

$$\exists S^*(X) : E_{\theta} S^*(X) = \theta$$

группа
несмещенная
оценок

$$W^*(X) = E_{\theta}(S^*(X)|T(X))$$

$$D_{\theta} W^*(X) < D_{\theta} W(X) ?$$

Определение.

$T(X)$ — полная, если

$$E_{\theta} g(T(X)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow g(t) \equiv 0$$

$$E_{\theta} g(T(X)) = \int g(t) p_T(t, \theta) \nu(dt) \stackrel{\text{скал. произв}}{=} 0 \quad \forall \theta$$

$\{p_T(t, \theta) : \theta \in \Theta\}$ — полная, если

$$\int g p_T = 0 \quad \forall \theta \Leftrightarrow g \equiv 0$$

Теорема.

Пусть $T(X)$ — полная, достаточная

$S_1(X), S_2(X)$ — несмещённые оценки

$$W_1(X) = E_{\theta}[S_1(X) | T(X)]$$

$$W_2(X) = E_{\theta}[S_2(X) | T(X)]$$

Тогда $W_1(X) \stackrel{\text{п.н.}}{=} W_2(X)$

Для $\forall$ несмещ. оценки используем статистику, дистрибуцию которой нельзя улучшить

$$\theta = \int L(\theta, x) W_1(T(x)) \nu(dx)$$

$$\theta = \int L(\theta, x) W_2(T(x)) \nu(dx)$$

$$0 = \int \underbrace{(W_1(T(x)) - W_2(T(x)))}_{\substack{\text{н.н.} \\ 0}} \underbrace{L(\theta, x)}_{\leftarrow \text{норма}} \nu(dx)$$

$$W_1(T(X)) = W_2(T(X)) \text{ почти наверное}$$

Определение

Исчислительная оценка с равномерной